
**SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 2000-2001**

Angelo Cavallucci

**PROPRIETÀ DI REGOLARITÀ DELLA DISTANZA
DA UN INSIEME IN UNO SPAZIO DI HILBERT**

19 giugno 2001

Riassunto. Vengono esposte diverse recenti caratterizzazioni della differenziabilità della distanza da un insieme chiuso in uno spazio di Hilbert.

Abstract . We present several recent characterizations for the local differentiability of the distance function from a closed set in a Hilbert space.

PROPRIETA' DI REGOLARITA' DELLA DISTANZA DA UN INSIEME IN UNO SPAZIO DI HILBERT

ANGELO CAVALLUCCI

Sia $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio di Hilbert reale e C un sottoinsieme chiuso non vuoto. Consideriamo la funzione distanza definita da

$$X \ni x \longrightarrow d_C(x) := \inf_{y \in C} \|x - y\|$$

e la multifunzione *proiezione metrica* su C definita da

$$X \ni x \longrightarrow \Pi_C(x) := \{y \in C \mid d_C(x) = \|x - y\|\}.$$

Se C e' anche convesso, e' ben noto che

$$\Pi_C(x) = \{\pi_C(x)\}, \forall x \in X,$$

ossia che $\Pi_C(x)$ e' costituito dal solo punto $\pi_C(x)$, che la funzione $\pi_C(\cdot)$ e' lipschitziana di modulo 1 su X , che esistono i gradienti

$$\nabla d_C^2(x) = 2[x - \pi_C(x)], \forall x \in X,$$

$$\nabla d_C(x) = \frac{x - \pi_C(x)}{d_C(x)}, \forall x \in X \setminus C$$

e che

$$\langle x' - x, \pi_C(x') - \pi_C(x) \rangle \geq \|\pi_C(x') - \pi_C(x)\|^2$$

Qui ci proponiamo di esporre alcuni risultati sulla differenziabilita' locale della funzione $d_C(\cdot)$ per C non necessariamente convesso.

Dall'identita'

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

segue

$$f(x) := \sup_{y \in C} [2\langle x, y \rangle - \|y\|^2] = \|x\|^2 - d_C^2(x)$$

e $f(\cdot)$ risulta essere convessa e localmente lipschitziana su X . Pertanto esistono i limiti, per ogni x e h ,

$$f'(x; h) := \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} =$$

$$= 2 \langle x, h \rangle - \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{d_C^2(x+th) - d_C^2(x)}{t}$$

e per $x \notin C$ si ha

$$f'(x; h) = 2 \langle x, h \rangle - 2d_C(x)d'_C(x; h).$$

Inoltre (cfr. [D], Theor. 7.3) l'insieme

$$\{x \in X \mid \exists \nabla f(x), \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - \langle h, \nabla f(x) \rangle|}{\|h\|^2} < \infty\}$$

e' denso in X .

Ne segue che $d_C^2(\cdot)$ e' Frechet-differenziabile su un sottoinsieme denso di X e che $d_C(\cdot)$ e' Frechet-differenziabile su un sottoinsieme denso di $X \setminus C$.

Se $\dim X < \infty$, si ha

$$d'(x; h) = \min\{\langle h, \frac{x-c}{\|x-c\|} \rangle \mid c \in \Pi_C(x)\}, \quad c \notin C$$

(cfr. [C], [Z]) e quindi $d(\cdot)$ e' differenziabile in $x \notin C$ se solo se $\Pi_C(x)$ contiene un solo elemento.

Estensioni della formula precedente al caso di X qualsiasi si trovano, per esempio, in [BG], [Z].

Indichiamo con $B := \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$ la sfera unita' di X e riportiamo alcune definizioni da [CLSW], [L].

$$N_C^P(x) := \{v \in X \mid \exists \delta > 0 : x \in \Pi_C(x + \delta v)\}, \quad x \in C;$$

$$N_C(x) := \{v = w - \lim_{n \rightarrow \infty} v_n \mid v_n \in N_C^P(x_n), C \ni x_n \rightarrow x\}, \quad x \in C,$$

ove "w-lim" significa convergenza debole;

$$T_C(x) := \{v = w - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x}{t_n} \mid 0 < t_n \rightarrow 0, C \ni x_n \rightarrow x\}, \quad x \in C;$$

$$T_C^w(x) := \{v = w - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x}{t_n} \mid 0 < t_n \rightarrow 0, C \ni x_n \rightarrow x\}, \quad x \in C;$$

$$T_C^c(x) := \{v \in X \mid \limsup_{x' \rightarrow x} \frac{d_C(x' + tv) - d_C(x')}{t} \leq 0\}, \quad x \in C.$$

Osserviamo che per $x \in C$ sono equivalenti le affermazioni

$$x \in \Pi_C(x + \delta v),$$

$$d_C(x + \delta v) = \delta \|v\|,$$

$$\langle x' - x, v \rangle \leq \frac{1}{2\delta} \|x' - x\|^2, \quad \forall x' \in C$$

e ricordiamo che

$$v \in T_C^c(x) \Leftrightarrow \langle v, h \rangle \leq 0, \forall h \in N_C(x).$$

Per

$$f : X \longrightarrow]-\infty, +\infty]$$

poniamo

$$\partial_P f(x) := \{v \in X \mid \liminf_{x' \rightarrow x} \frac{f(x') - f(x) - \langle v, x' - x \rangle}{\|x' - x\|^2} > -\infty\},$$

$$\partial f(x) := \{v = w - \lim_{n \rightarrow \infty} v_n \mid v_n \in \partial_P f(x_n), (x_n, f(x_n)) \longrightarrow (x, f(x))\},$$

$$\partial_F f(x) := \{v \in X \mid \liminf_{x' \rightarrow x} \frac{f(x') - f(x) - \langle v, x' - x \rangle}{\|x' - x\|} \geq 0\}.$$

Tutti gli oggetti definiti sopra sono ampiamente studiati in [CLSW] e [L].
Poniamo anche

$$U_C(r) := \{x \in X \mid 0 < d_C(x) < r\}, \quad r > 0.$$

Esponiamo ora alcune proprietà della funzione distanza $d_C(\cdot)$.

Teorema 1. *Supponiamo $\Pi_C(x) \neq \emptyset$ e che esista il differenziale di Gateaux $\nabla d_C(x)$. Allora si ha*

- i) $x \in C \Leftrightarrow \nabla d_C(x) = 0$;
- ii) $\nabla d_C(x) \neq 0 \Rightarrow x \notin C, \Pi_C(x) = \{\pi_C(x)\}$,

$$\nabla d_C(x) = \frac{x - \pi_C(x)}{d_C(x)} = \frac{x - \pi_C(x)}{\|x - \pi_C(x)\|}.$$

Per la dimostrazione rimandiamo a [CLSW], Prop.2.8.4.

Teorema 2. *Supponiamo $v \in \partial_P d_C(x)$, $x \notin C$. Allora si ha*

- i) $\Pi_C(x) = \{\pi_C(x)\}$;
- ii) $d_C(\cdot)$ e' Frechet-differenziabile in x e riesce

$$v = \nabla d_C(x) = \frac{x - \pi_C(x)}{\|x - \pi_C(x)\|}, \quad \partial_P d_S(x) = \{\nabla d_C(x)\};$$

- iii) $v \in N_C^P(\pi_C(x))$;

- iv) $x_n \longrightarrow x, v_n \in \partial_P d_C(x_n) \Rightarrow \pi_C(x_n) \longrightarrow \pi_C(x), v_n \longrightarrow v$.

Per la dimostrazione si veda [CLSW], Theor.2.6.1 e anche [CLW], Theor.4.1.

Teorema 3. Sia $x \notin C$, $\bar{c} \in \Pi_C(x)$. Allora si ha

$$0 < t < 1 \Rightarrow \partial d_C(\bar{c} + t(x - \bar{c})) = \left\{ \frac{x - \bar{c}}{\|x - \bar{c}\|} \right\}, \quad \nabla d_C(\bar{c} + t(x - \bar{c})) = \frac{x - \bar{c}}{\|x - \bar{c}\|}.$$

Per la dimostrazione rimandiamo a [CR], Prop.2.1. In [CR] e' anche provato che gli insiemi

$$\{x \notin C \mid \partial d_C(x) \neq \emptyset\},$$

$$\{x \notin C \mid \Pi_C(x) \neq \emptyset\}$$

sono densi in $X \setminus C$.

Teorema 4. Supponiamo $v \in \partial_F d_C(x)$, $x \notin C$. Allora si ha

i) $\Pi_C(x) = \{\pi_C(x)\};$

ii) $d_C(\cdot)$ e' Frechet-differenziabile in x e riesce

$$v = \nabla d_C(x) = \frac{x - \pi_C(x)}{\|x - \pi_C(x)\|}, \quad \partial_F d_S(x) = \{\nabla d_C(x)\};$$

iii) $v \in N_C^P(\pi_C(x));$

iv) $x_n \rightarrow x$, $v_n \in \partial_F d_C(x_n) \Rightarrow \pi_C(x_n) \rightarrow \pi_C(x)$, $v_n \rightarrow v$.

Per la dimostrazione rimandiamo a [BG], Lemma 6.

Teorema 5. Sia $x \notin C$, $\bar{c} \in \Pi_C(x)$. Allora sono equivalenti le affermazioni

i) $d'_C(x; \bar{c} - x) = -d'_C(x; x - \bar{c});$

ii) $d'_C(x; h) = \langle h, \frac{x - \bar{c}}{\|x - \bar{c}\|} \rangle, \quad \forall h \in X.$

Per la dimostrazione rimandiamo a [BFG].

Per l'insieme

$$C := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq x_1^6 - 1 + (1 - x_1^2)^{\frac{1}{2}}\}, \quad -1 \leq x_1 \leq 1,$$

si ha (cfr. [CSW], Remark 4.13)

$$\Pi_C(0, -t) = \{(0, 0)\} \Leftrightarrow 0 < t \leq 1,$$

$$\nabla d_C(0, -1) = (0, 1)$$

$$\partial d_C(0, -1) = \emptyset.$$

Passiamo ora ad esporre il risultato principale di [PRT] sulla differenziabilita' locale della funzione distanza $d_C(\cdot)$.

Teorema 6. Sia $\bar{x} \in C$, chiuso in X . Sono equivalenti le seguenti affermazioni, ove O indica un opportuno intorno aperto di \bar{x} che può variare di volta in volta,

i) $d_C(\cdot) \in C^1(O \setminus C)$;

ii) $d_C(\cdot)$ e' Frechet-differenziabile su $O \setminus C$;

iii) $d_C(\cdot)$ e' Gateaux-differenziabile su $O \setminus C$ e $\Pi_C(x) \neq \emptyset$ per ogni $x \in O$;

iv) $d_C^2(\cdot)$ e' Frechet-differenziabile su O e $\nabla d_C^2(\cdot)$ e' lipschitziano su O ;

v) esiste $r > 0$, dipendente da O , tale che

$$x \in C \cap O, v \in N_C^P(x) \Rightarrow \langle v, x' - x \rangle \leq \frac{\|v\|}{2r} \|x' - x\|^2, \forall x' \in C,$$

ossia, per $v \neq 0$, $x \in \Pi_C(x + r \frac{v}{\|v\|})$;

vi) esistono $\epsilon > 0, \rho > 0$ tali che

$$x \in C, \|x - \bar{x}\| < \epsilon, v \in N_C(x) \Rightarrow \langle v, x' - x \rangle \leq \frac{\rho \|v\|}{2\epsilon} \|x' - x\|^2,$$

per ogni $x' \in C$ con $\|x' - x\| \leq \epsilon$;

vii) esistono $r > 0, \sigma > 0$ tali che

$$x_i \in C \cap O, v_i \in N_C(x_i), \|v_i\| < r \Rightarrow \langle v_1 - v_2, x_1 - x_2 \rangle \geq -\sigma \|x_1 - x_2\|^2;$$

viii) $\Pi_C(x) = \{\pi_C(x)\}$ per ogni $x \in O$ e $\pi_C(\cdot)$ e' $\|\cdot\| - w$ continua su O ;

ix) $\Pi_C(x) = \{\pi_C(x)\}$ per ogni $x \in O$ e inoltre esiste $\alpha > 0$ tale che

$$x_i \in O \Rightarrow \langle x_1 - x_2, \pi_C(x_1) - \pi_C(x_2) \rangle \geq \alpha \|\pi_C(x_1) - \pi_C(x_2)\|^2;$$

x) esiste $r > 0$, dipendente da O , tale che

$$x \in C \cap O \Rightarrow d_{T_C(x)}(x' - x) \leq \frac{1}{2r} \|x' - x\|^2, \forall x' \in C;$$

xi) se O e' anche convesso, esiste $\sigma > 0$ tale che la funzione

$$O \ni \longrightarrow d_C^2(x) + \sigma \|x\|^2$$

e' convessa;

xii) $\partial_P d_C(x) \neq \emptyset$ per ogni $x \in O$;

xiii) $\partial_F d_C(x) \neq \emptyset$ per ogni $x \in O$;

xiv) se C e' debolmente chiuso in O , e' equivalente alle precedenti condizioni anche la seguente

$$\Pi_C(x) = \{\pi_C(x)\}, \forall x \in O.$$

Corollario. Se per $\bar{x} \in C$ valgono le condizioni equivalenti i)-xiii), esiste un intorno aperto O di \bar{x} tale che

i) $\Pi_C(x) = \{\pi_C(x)\}$ per ogni $x \in O$ e $\pi_C(\cdot)$ e' lipschitziana su O ;

ii) $d_C(\cdot)$ e' Frechet-differenziabile su $O \setminus C$ e

$$\nabla d_C(x) = \frac{x - \pi_C(x)}{d_C(x)}, \quad \forall x \in X \setminus C;$$

iii) $N_C^P(x) = N_C(x) =$ convesso chiuso, $\forall x \in C \cap O$;

iv) $T_C^e(x) = T_C(x) = T_C^w(x) =$ convesso chiuso, $\forall x \in C \cap O$.

Le dimostrazioni del Teorema 6 e del Corollario sono contenute in [PRT]. Tale lavoro e' stato motivato dal lavoro precedente [CSW] dedicato allo studio della differenziabilita' della distanza $d_C(\cdot)$ nella striscia $U_C(r)$ di ampiezza costante $r > 0$.

Teorema 7. Sia $r > 0$ e sia C chiuso in X . Sono equivalenti le seguenti affermazioni

i) $d_C(\cdot) \in C^1(U_C(r))$;

ii) $d_C(\cdot)$ e' Frechet-differenziabile su $U_C(r)$;

iii) $d_C(\cdot)$ e' Gateaux-differenziabile su $U_C(r)$ e $\Pi_C(x) \neq \emptyset$ per ogni $x \in U_C(r)$;

iv) $d_C^2(\cdot)$ e' Frechet-differenziabile su $U_C(r)$ e $\nabla d_C^2(\cdot)$ e' localmente lipschitziano su $U_C(r)$;

v) si ha

$$x \in C, v \in N_C^P(x) \Rightarrow \langle v, x' - x \rangle \leq \frac{\|v\|}{2r} \|x' - x\|^2, \quad \forall x' \in C,$$

ossia, per $v \neq 0, x \in \Pi_C(x + r \frac{v}{\|v\|})$;

vi) si ha

$$x \in C, v \in N_C(x) \Rightarrow \langle v, x' - x \rangle \leq \frac{\|v\|}{2r} \|x' - x\|^2, \quad \forall x' \in C,$$

vii) si ha

$$x_i \in C, v_i \in N_C(x_i), \|v_i\| < r \Rightarrow \langle v_1 - v_2, x_1 - x_2 \rangle \geq -\|x_1 - x_2\|^2;$$

viii) si ha

$$u \in U_C(r), x \in \Pi_C(u) \Rightarrow x \in \Pi_C(x + r \frac{u - x}{\|u - x\|});$$

ix) $\Pi_C(x) = \{\pi_C(x)\}$ per ogni $x \in U_C(r)$ e $\pi_C(\cdot)$ e' $\|\cdot\|$ -w continua su $U_C(r)$;

x) si ha

$$x, x' \in C \Rightarrow d_{T_C(x)}(x' - x) \leq \frac{1}{2r} \|x' - x\|^2;$$

xi) esiste $\sigma > 0$ tale che la funzione

$$A \ni \rightarrow d_C^2(x) + \sigma \|x\|^2$$

e' convessa su ogni convesso $A \subset U_C(r)$;

xii) $\partial_P d_C(x) \neq \emptyset$ per ogni $x \in U_C(r)$;

xiii) $\partial_F d_C(x) \neq \emptyset$ per ogni $x \in U_C(r)$;

xiv) se C e' debolmente chiuso, e' equivalente alle precedenti condizioni anche la seguente

$$\Pi_C(x) = \{\pi_C(x)\}, \forall x \in U_C(r).$$

Per la dimostrazione rimandiamo a [PRT] e anche a [CSW].

Corollario 1. Se C verifica le condizioni equivalenti i)-xiii) con $r > 0$, allora riesce $\Pi_C(x) = \{\pi_C(x)\}$ per ogni $x \in U_C(r)$ e inoltre

i) se $0 < r' < r$, si ha

$$x, x' \in U_C(r') \Rightarrow \langle x - x', \pi_C(x) - \pi_C(x') \rangle \geq \frac{r - r'}{r} \|\pi_C(x) - \pi_C(x')\|^2,$$

$$\|\pi_C(x) - \pi_C(x')\| \leq \frac{r}{r - r'} \|x - x'\|;$$

ii) $d_C(\cdot)$ e' Frechet-differenziabile su $U_C(r)$ e

$$\nabla d_C(x) = \frac{x - \pi_C(x)}{d_C(x)}, \forall x \in U_C(r);$$

iii) per ogni $x \in C$ si ha

$$N_C^P(x) = N_C(x) = \text{convesso chiuso},$$

$$T_C^c(x) = T_C(x) = T_C^w(x) = \text{convesso chiuso}.$$

Corollario 2. Per C chiuso in X si ha

i) C e' convesso se e solo se $\Pi_C(x) = \{\pi_C(x)\}$ per ogni $x \in X$ e $\pi_C(\cdot)$ e' $\|\cdot\| - w$ continua su X ;

ii) se C e' debolmente chiuso, allora C e' convesso se e solo se $\Pi_C(x) = \{\pi_C(x)\}$ per ogni $x \in X$.

Per la dimostrazione rimandiamo a [PRT] oppure a [CSW].

Nel caso di $X = R^n$, molte delle condizioni equivalenti dei teoremi 6 e 7 sono contenute in [F].

Per l'insieme

$$C := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq x_1^{\frac{2}{3}}\}$$

si ha $(1, 0) \in N_C(0, 0)$, ma $(0, 0) \notin \Pi_C(r, 0)$ per nessun $r > 0$ e quindi $(1, 0) \notin N_C^P(0, 0)$ e non valgono le condizioni del Teorema 6.

Un esempio significativo di insieme che verifica le condizioni del Teorema 6 e' dato dal seguente teorema.

Teorema 8. Sia $\bar{x} \in C \cap O$, O aperto in X , sia D convesso chiuso nello spazio di Banach Y e sia

$$F : O \longrightarrow Y$$

Frechet-differenziabile su O con differenziale $F'(\cdot)$ lipschitziano su O e tale che

$$C \cap O = \{x \in O \mid F(x) \in D\},$$

$$-F'(\bar{x})(X) + \bigcup_{t \geq 0} t(D - F(\bar{x})) = Y.$$

Allora per $\bar{x} \in C$ valgono le affermazioni del Teorema 6 e si ha inoltre

$$N_C(\bar{x}) = \{F'(\bar{x})^* y \mid y \in N_D(F(\bar{x}))\},$$

$$T_C(\bar{x}) = \{h \in X \mid F'(\bar{x})h \in T_D(F(\bar{x}))\}$$

Per la dimostrazione rimandiamo a [CELPT].

Per l'insieme

$$C := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \leq |x_1|^\alpha\}, \quad 1 < \alpha < 2,$$

si ha

$$(0, 1) \in N_C(0, 0), \quad N_C^P(0, 0) = \{(0, 0)\}$$

e quindi non vale in $(0, 0)$ la condizione vi) del Teorema 6. Dunque non si puo' eliminare l'ipotesi di lipschitzianita' di $F'(\cdot)$ nel Teorema 8.

BIBLIOGRAFIA

- [BFG] J. M. Borwein, S.P. Fitzpatrick, J. R. Giles, *The differentiability of real functions on normed linear spaces using generalized subgradients*, J.Math. Anal. **128** (1987), 512-34.
- [BG] J. M. Borwein, J. R. Giles, *The proximal normal formula in Banach spaces*, Trans. A.M.S. **302** (1987), 371-81.
- [C] F. H. Clarke, *Generalized gradients and applications*, Trans. A.M.S. **205** (1975), 247-62.
- [CELPT] C. Combari, A. Elhilali Alaoui, A. Levy, R. A. Poliquin, L. Thibault, *Convex composite functions in Banach spaces and the primal-lower-nice property*, Proc. A.M.S. **126** (1998), 3701-08.
- [CLW] F. H. Clarke, Yu. S. Ledyayev, P. R. Wolenski, *Proximal analysis and minimization principles*, J.Math. Anal. **196** (1995), 722-35.
- [CLSW] F. H. Clarke, Yu. S. Ledyayev, R. S. Stern, P. R. Wolenski, *Nonsmooth Analysis and Control Theory*, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [CR] F. H. Clarke, M. L. Radulescu, *Geometric approximation of proximal normals*, J.Convex Anal. **4**, **2** (1997), 373-79.
- [CSW] F. H. Clarke, R. S. Stern, P. R. Wolenski, *Proximal smoothness and the lower- C^2 property*, J.Convex Anal. **2** (1995), 117-44.
- [D] R. Deville, *Smooth variational principles and non-smooth analysis in Banach spaces*, Nonlinear analysis, differential equations and control, F. H. Clarke, R. S. Stern (eds.) (1999), Kluwer Academic Publishers, the Netherlands.
- [F] H. Federer, *Curvature measures*, Trans. A.M.S. **93** (1959), 418-91.
- [L] P. D. Loewen, *Optimal control via nonsmooth analysis*, CRM Proc. Lecture Notes, vol. 2, American Mathematical Society, Providence, RI, 1993.
- [PRT] R. A. Poliquin, R.T. Rockafellar, L. Thibault, *Local differentiability of distance functions*, Trans. A.M.S. **352**, **11** (2000), 5231-49.
- [Z] L. Zajicek, *Differentiability of the distance function and points of multivaluedness of the metric projection in Banach space*, Czechosl. Math. J. **33**(108) (1983), 292-308.